Luis Thayer Ojeda 0180 | Of.1004
Providencia,Santiago, Chile
Teléfono: +56.2.234.1778
Fax: +56.2.231.9731
www.fulcrum.cl

2. BASES TEÓRICAS

Introducción

El problema de selección múltiple y de asignación de recursos, es en general un problema complejo. De hecho existe toda una rama de la ingeniería dedicada a esto. Para poder resolver este problema, en primer lugar se debe aceptar su complejidad. Esto lleva necesariamente a requerir de modelos al menos tan complejos cuanto lo que se pretende resolver; en palabras simples, no es posible resolver un problema de asignación de recursos y priorización de carteras usando, por ejemplo, la regla de tres; es necesario contar con herramientas a la altura de la situación.

A continuación, se presentan las bases teóricas (matemáticas y psicológicas) del método AHP de toma de decisiones, cuyo fin es entregar un soporte sólido para poder abordar y resolver exitosamente los problemas complejos a que se enfrentan los planificadores y tomadores de decisión en el día a día.

Las bases teóricas del AHP y ANP se hallan en:

1. la teoría de la medida,
2. la teoría de grafos,
3. la suma de Cesaro,
4. el teorema de Perron-Frobenius,
5. la teoría de las perturbaciones y estados de equilibrio,

así como, en elementos psicológicos e inclusive de carácter biológico, como son:

6. los procesos de estímulo-respuesta, y
7. la capacidad humana de interpretación y transmisión de esta información en la intensidad y cantidad de descargas eléctricas de las neuronas.

Los primeros 5 puntos, se asocian a la teoría requerida para la construcción de un modelo de medida de intensidad de dominancia, conocido también como topología de ordinales, donde lo que se pretende determinar son procesos del tipo: si AdB, (A domina a B), BdC, y CdA, ¿cuál es la relación de preferencias entre ellos? Aquí, cabe recordar el Teorema de Imposibilidad de Arrow (Kenneth Arrow, Premio Nobel de Economía, 1972), que dice:,"En un arreglo de dominancias como el indicado no cabe ninguna posibilidad de orden completo"[1]. Sin embargo, se ha demostrado que esta proposición se halla incompleta. (Saaty, 2001-2006, Saaty & Peniwati, 2008) pues supone, (como hipótesis implícita), que dichas dominancias no pueden ser llevadas a valores cardinales. Es decir, no es posible construir intensidades cardinales de dominancia entre los elementos. Lo cual, en términos de una solución general, es una hipótesis incorrecta (inclusive en lo relativo a la agregación social de preferencias). De hecho, para una simple matriz de comparaciones a pares de 2x2, con intensidad de comparación "*a*", el vector de prioridades genérico está dado por: VP={(1/(1+*a*) ; *a*/(1+*a*)}; al hacer tender "*a*" a infinito se obtiene como resultante el vector: {0,1}, que representa precisamente el tipo de preferencia de una escala ordinal (intensidad de dominancia infinita). Esto implica que, una escala ordinal puede ser definida como el límite de una escala cardinal (preferencia cardinal $\rightarrow\infty$ = preferencia ordinal).

[1] Nota: completo, se refiere a respetando las 5 propiedades naturales de ordenamiento establecidas por Arrow).

Luis Thayer Ojeda 0180 | Of.1004
Providencia,Santiago, Chile
Teléfono: +56.2.234.1778
Fax: +56.2.231.9731
www.fulcrum.cl

Este pequeño ejercicio, muestra que las escalas ordinales son un caso particular de la escalas cardinales, por lo tanto, las soluciones obtenidas en dicho espacio, son casos particulares (incompletas) de soluciones generales en el espacio cardinal.

La búsqueda de estas intensidades de dominancia, está asociada a los primeros 5 puntos descritos. A partir de esta base teórica, proviene uno de los resultados más notables de este método, y que corresponde a identificar al vector propio de una matriz recíproca positiva, (vector que representa el estado de equilibrio final de una matriz de preferencias no consistente o perturbada), directamente con las intensidades de preferencia o dominancia. Este notable resultado, nos da la posibilidad de asociar un vector de prioridades cardinal a las preferencias o juicios de dominancia inicialmente emitidos por el conjunto de decisores presentes.

Así, el vector de preferencias (VP) es calculado como: VP = Límite $|A|^n$, con: $n \rightarrow \infty$, cuya convergencia está asegurada por las propiedades de dicha matriz. *(Nota:* |A| *corresponde a una matriz recíproca positiva, normalizada).*

Por otro lado, los últimos dos puntos descritos (6 y 7), corresponden a la construcción de una escala fundamental (absoluta), que sea capaz de representar las capacidades y limitaciones del ser humano y que a su vez sea de tipo cardinal proporcional, es decir, que permita las cuatro operaciones aritméticas dentro de ella.

Tipos de Escalas y su Medida Asociada

Hay una clara distinción que debe hacerse entre leer en una escala, lo que se conoce como medir, y las propiedades matemáticas subyacentes a la escala a la cual esa medición pertenece. El lego piensa en una escala como un dispositivo para determinar el peso de una persona en kilogramos o en libras, como una vara de medir o como un reloj para ver la hora. Pero una escala tiene también una definición más abstracta.

En general existe una confusión en la forma en que se utiliza el término escala. Por un lado, se dispone de la definición clara de una escala matemática, que es invariante bajo una transformación. Por otro lado, el uso informal de la palabra escala proviene de alguna de las muchas escalas construidas por el hombre a través de los siglos, frecuentemente relacionando un dispositivo o un instrumento físico que se aplica para medir todos los objetos que tengan una cierta propiedad. A esto se le llama **escala física u objetiva.**

Los valores de una escala física son universales y se aplican a todos los objetos que posean la propiedad para la que la escala fue diseñada. A veces, en una forma no claramente especificada, las mediciones de una escala física se llaman **mediciones absolutas**. Las escalas físicas requieren de un origen a partir del cual comenzar a medir y una unidad para relacionar linealmente las mediciones con intervalos iguales. Algunas escalas, como la escala logarítmica, tienen una unidad pero no son lineales y no necesariamente miden intervalos iguales. Algunas de las bien conocidas funciones matemáticas cumplen con varias de las propiedades características de las escalas con unidad.

Matemáticamente, una escala es una tripleta compuesta por un conjunto de números, un conjunto de objetos y una transformación desde los objetos hacia los

Luis Thayer Ojeda 0180 | Of.1004
Providencia,Santiago, Chile
Teléfono: +56.2.234.1778
Fax: +56.2.231.9731
w w w . f u l c r u m . c l

números. Una escala también tiene una interpretación más abstracta, que sólo se refiere a la naturaleza de los números utilizados y no a los objetos ni a cómo los números son asignados a los objetos. La clase de transformación o las formas de crear los números que se desea admitir en una medición particular definen lo que se llama la escala de medición para esa operación de medida.

Alguna de las escalas que utilizamos comúnmente son:

Escala Nominal: invariante bajo correspondencia uno a uno, donde, por ejemplo, se asigna un nombre o un número a un objeto para identificarlo, pero el número en sí no proporciona ninguna información adicional sobre el objeto. Ejemplos hay muchos en la práctica, como el número de teléfono, o el número de un corredor en una carrera. Esta escala no constituye medida.
Ejemplo de escala nominal: El caballo <u>N°3</u>

Escala Ordinal: invariante bajo transformaciones monótonas, donde los elementos se ordenan por números, pero las magnitudes de éstos sólo sirven para designar un orden, creciente o decreciente. Por ejemplo, al asignar los números 1 y 2 a dos personas, para indicar que una es más alta que la otra, sin incluir más información sobre sus alturas reales. El número menor puede ser asignado a la persona más alta o viceversa. Esta escala no constituye medida.
Ejemplo de escala ordinal: El caballo N°3, llegó <u>primero</u> a la meta.

Escala de Intervalos: invariante bajo una transformación lineal positiva del tipo ax+b, con a>0. Por ejemplo, la transformación lineal F° = (9/5)C° + 32 que convierte lecturas de temperaturas de grados Celsius a grados Fahrenheit.
Debe notarse que no es posible sumar dos mediciones x_1 y x_2 en una escala de intervalos porque entonces $y_1 + y_2 = (a\,x_1 + b) + (a\,x_2 + b) = a\,(x_1 + x_2) + 2b$ que es de la forma $ax + 2b$ y no de la forma $ax + b$.[2]
Sin embargo, es posible tomar el promedio de las dos lecturas, porque al dividir por 2 se obtiene la forma correcta. En otras palabras, no se pueden sumar dos mediciones de temperatura para obtener un resultado que corresponda con la situación física en la cual los dos objetos medidos se sumen. Por ejemplo, 10 grados de temperatura sumados con 15 grados de temperatura no hacen 25 grados de temperatura, (a lo sumo su mezcla podría resultar de 15 grados).
Ejemplo de escala de intervalos: El caballo N°3, llegó primero a la meta a <u>dos cuerpos</u> del segundo

Escala de Proporciones: invariante bajo transformaciones homogéneas, $y = ax$, $a > 0$. Un ejemplo es la conversión de peso medido en libras a kilogramos, mediante la transformación K=2.2P. La proporción de pesos de dos objetos es la misma, independientemente de si la medición se efectuó en libras o en kilos. El cero no corresponde a la medición de ningún objeto real, sólo se aplica a objetos que no tienen la propiedad en cuestión. Claramente no es posible dividir por cero y obtener un resultado

[2] Al cambiar de ax+b a ax+2b se ha modificado el invariante, luego, la medida ya no pertenece a la misma escala.

interpretable dentro de la escala. Además, la razón de dos mediciones dentro de una misma escala de proporciones como 6kg /3kg = 2 es un número que pertenece a una escala absoluta, que indica que el objeto de 6kg es el doble de pesado que el objeto de 3kg. La razón 2, no puede transformarse mediante alguna fórmula en un número diferente. El concepto anterior, permite introducir la siguiente escala.

Ejemplo de escala de proporciones: El caballo N°3, llegó primero a la meta a dos cuerpos del segundo, doblando la distancia entre el segundo y el tercero.

Escala Absoluta: invariante bajo la transformación identidad y=x. Por ejemplo, los números que se utilizan para contar las personas presentes en una sala. Una escala absoluta es un caso especial de una escala de proporciones, en la que la constante multiplicativa es igual a uno. Los números reales que se usan en matemáticas para resolver ecuaciones pertenecen a una escala absoluta. Los números naturales y los números reales se definen en términos de correspondencia y clases de equivalencia uno a uno y no en términos de emplear una unidad de medida partiendo desde el origen.

También hay otras escalas muy conocidas como las escalas logarítmicas o las semi-logarítmicas. La complejidad de una escala determina qué tipo de operaciones matemáticas pueden ser ejecutadas válidamente para el conjunto de mediciones efectuadas en ella.

Una escala física puede pertenecer a cualquiera de las escalas matemáticas: una guía de teléfonos como una escala nominal, direcciones de las casas en una calle en una escala ordinal, una escala de Fahrenheit como escala de intervalos, una cinta métrica como escala de proporciones y el número de asistentes a una reunión como una escala absoluta. Una escala física requiere establecer relaciones entre sus lecturas y las ocurrencias objetivas en el mundo real. Por ejemplo: los cero grados Celsius corresponden a la temperatura de congelamiento del agua mientras que los 100 grados Celsius corresponde a la temperatura de ebullición, son números arbitrarios que permiten hacer asociaciones entre otros valores y fenómenos observables.

Ninguna de las escalas matemáticas especifica en su definición, la necesidad de un cero o de alguna unidad. En cada caso, tanto la unidad como el cero podrían o no deducirse lógicamente a partir de la definición. A pesar que se afirma a menudo que una escala de proporciones tiene un cero absoluto, éste es un supuesto que en la práctica sólo facilita el uso de las escalas de proporciones. En ninguna parte de la definición matemática de una escala se establece que una escala *debe* tener una unidad ni un origen (valor cero).

Para mayor claridad, se utilizará el término de escalas objetivas para referirse a escalas sobre dispositivos de medición y a “la medición efectuada con ellos” se le llamará medición objetiva. Sin embargo, es significativo que no toda medición efectuada con un dispositivo sea realmente una medición “objetiva”. La escala de Likert es un intento de medir juicios subjetivos con respecto a intensidades de preferencia a través de una escala objetiva (absoluta) y midiendo todos los elementos uno a uno. Tal escala carece de definición de unidad y de un punto de referencia para la representación precisa del estado real de la mente del individuo cuyo entendimiento se está tratando de medir. En el mejor de los casos, la escala resultante es ordinal.

Luis Thayer Ojeda 0180 | Of.1004
Providencia,Santiago, Chile
Teléfono: +56.2.234.1778
Fax: +56.2.231.9731
www.fulcrum.cl

Para permitir el manejo de mediciones, y capturar así el orden subyacente en un problema complejo, se requieren mediciones que sean cardinales, no ordinales. Esto da origen a un segundo tipo de escalas, aparte de las escalas físicas, que son conocidas como escalas relativas. Éstas también poseen propiedades de las escalas matemáticas, y en particular de la escala matemática absoluta. Las escalas relativas no pueden existir objetivamente fuera del tiempo y para todos los objetos, sólo sirven por un cierto intervalo de tiempo y sobre un conjunto dado de objetos. Hay dos formas de deducir una escala relativa. La primera forma es elemental y se describe a continuación.

La Normalización en las Mediciones Relativas

La normalización es esencial en las mediciones relativas. En las mediciones relativas, se adoptan las lecturas reales en una escala objetiva para representar la comprensión del lector y luego se transforman en valores relativos. Esto involucra la división de un conjunto de lecturas tomadas a partir de una escala cardinal física por la suma de todas ellas o la división por la mayor de ellas o la división por cualquiera otra de las mediciones o un subconjunto de ellas. Esta normalización o división de los valores de la escala implica tácitamente que las mediciones usadas pertenecen a una escala cardinal, absoluta o relativa. El resultado es adimensional y pertenece a una escala absoluta de números relativos. Pero, no siempre esto resulta apropiado para representar adecuadamente la mencionada comprensión, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Este caso considera dos criterios medidos por medio del mismo tipo de concepto, por ejemplo dólares que entregando datos sobre tres alternativas comunes. Para ir desde mediciones en una escala hacia valores relativos con respecto a estos criterios, se suman los valores en dólares para cada alternativa y esta suma se normaliza dividiendo por la suma total, como se muestra en la Tabla Nº 2.1, obteniéndose su total relativo.

Alternativas	Criterio C_1	Criterio C_2	Sumas	Valor Relativo de las Sumas
A_1	1	3	4	4/18 = .222
A_2	2	4	6	6/18 = .333
A_3	3	5	8	8/18 = .444

Tabla 2.1: Mediciones de Escalas Convertidas a Mediciones Relativas

Para obtener los valores relativos de la última columna de esta tabla, dado que los números en las dos columnas de criterios están representados en forma relativa entre sí, el AHP requiere que a los criterios se le asignen prioridades, lo que se realiza de la siguiente manera. Se suman todos los valores bajo cada una de las columnas y se dividen por la suma de las mediciones con respecto a todos los otros criterios medidos en la misma escala. Esta operación entrega la prioridad de ese criterio para esa unidad de medición. Multiplicando los valores relativos de las alternativas por los valores relativos de los criterios, y sumándolos se obtiene la columna final de la Tabla 2.2. En cada una de las tres columnas intermedias se muestra el valor y el valor relativo (o normalizado) de esa columna.

Luis Thayer Ojeda 0180 | Of.1004
Providencia,Santiago, Chile
Teléfono: +56.2.234.1778
Fax: +56.2.231.9731
www.fulcrum.cl

Alternativas	Criterio C_1 Peso Normalizado = 6/18		Criterio C_2 Peso Normalizado = 12/18		Sumas Normalizadas		Síntesis de los Valores Relativos de los Pesos (AHP).
A_1	1	1/6	3	3/12	4	4/18	(1/6*6/18+3/12*12/18) = 4/18 = .222
A_2	2	2/6	4	4/12	6	6/18	6/18 = .333
A_3	3	3/6	5	5/12	8	8/18	8/18 = .444

Tabla 2.2: Mediciones de Escala Convertidas en Mediciones Relativas

El resultado de la última columna coincide con el de la última columna de la Tabla 2.1 como se esperaba que ocurriera. De manera general, la normalización siempre es requerida cuando los criterios dependen de las alternativas, como ocurre en el caso del AHP.

De este ejemplo se puede observar que si se agregan nuevas alternativas, las proporciones de las prioridades de las alternativas originales permanecen inalteradas. Esto se puede demostrar, por ejemplo, en el caso de los dos criterios C1 y C2. Se comienza con dos alternativas A y B, cuyas prioridades bajo C1 y C2 son a_i y b_i, i = 1,2 respectivamente, por lo que su forma relativa es:

$$a_i / \sum_{i=1}^{2} a_i \qquad \mathrm{b}_i / \sum_{i=1}^{2} b_i .$$

Los pesos de C1 y C2 son, respectivamente

$$\sum_{i=1}^{2} a_i /(\sum_{i=1}^{2} a_i + \sum_{i=1}^{2} b_i), \sum_{i=1}^{2} b_i /(\sum_{i=1}^{2} a_i + \sum_{i=1}^{2} b_i) .$$

Sintetizando, es decir, ponderando y sumando, se obtienen las prioridades totales de A y B respectivamente

$$(a_1 + b_1)/(\sum_{i=1}^{2} a_i + \sum_{i=1}^{2} b_i), \qquad (a_2 + b_2)/(\sum_{i=1}^{2} a_i + \sum_{i=1}^{2} b_i) .$$

La razón entre estas prioridades es $(a_1 + b_1)/(a_2 + b_2)$, la que solamente depende de sus valores y no de las prioridades de los criterios. Debe notarse que la suma de los valores de las alternativas se utiliza como divisor para normalizar el valor de cada alternativa. Pero este valor es también el numerador de la prioridad de ese criterio y por lo tanto se cancela en el proceso de ponderación, dejando la suma de los valores de las alternativas para ambos criterios, en el denominador del resultado final. Esta suma a su vez se cancela al formar la proporción de las prioridades de A y B. Ahora aparece claro, que si se agrega una tercera alternativa C, la razón entre las prioridades de A y B no es afectada por los cambios en las prioridades de los criterios debidos a la nueva alternativa C. Se concluye entonces, que en este caso, (en que las prioridades o pesos de los criterios dependen de las alternativas), la razón entre las prioridades de las alternativas es invariante a la adición de una nueva alternativa. Esta independencia también debería tenerse en el caso más fuerte en que los criterios son independientes de las alternativas, pero las alternativas en sí son estructuralmente independientes unas de otras. Cuando la proporcionalidad no se mantiene, debido a la dependencia estructural de cada criterio, las prioridades de las alternativas sí pueden verse afectadas, y su orden revertirse por efectos de la incorporación de una nueva alternativa.

Cuando se utiliza el modo ideal (normalizando por el mayor valor asociado a una alternativa), el ideal debe ser preservado, de manera que cuando se incorporen nuevas alternativas, éstas sean comparadas con el antiguo ideal. Así, se permite a los valores sobrepasar el valor uno, consiguiendo que se conserven las proporciones entre las alternativas existentes. Se podría decir que existe una ley natural que relaciona las mediciones absolutas con las mediciones relativas sobre ciertos criterios y que esa ley es la normalización. Sin embargo, cabe recordar que en el proceso de normalización se pierde información sobre las mediciones originales, la unidad de medida original y su cero asociado. Por ejemplo, al normalizar mediciones en centavos y los correspondientes valores de las mediciones en dólares se obtienen los mismos valores relativos, perdiéndose la información asociada a que ellos provenían de medidas de diferentes órdenes de magnitud y que tienen diferentes unidades de medida (y por lo tanto diferentes prioridades).

La otra forma de obtener una escala relativa es completamente diferente. No se origina a partir de una escala objetiva, a pesar que las lecturas pertenecen a una escala matemática y que para este propósito en particular, ellas pertenecen a una escala matemática absoluta con valores relativos.

Las mediciones relativas también basan sus lecturas en ocurrencias del mundo real, relacionando pares de objetos que comparten una cierta propiedad y asumiendo que el miembro menor de la pareja define el valor de la unidad. Se relaciona cada par de objetos de un conjunto en particular, con una escala fundamental y luego se relacionan estas medidas con los números reales, de manera de construir o deducir una escala relativa de números absolutos. Esta segunda forma es utilizada en AHP.

En resumen, hay dos formas de efectuar las mediciones: una a través de un instrumento y haciendo directamente la correspondencia y la otra a través de juicios, donde la correspondencia se efectúa de manera indirecta. Al usar juicios, es posible asignarles números a los elementos intuyendo o importando su valor desde alguna escala de medición, (si es que existe una), o mediante la construcción cuidadosa de una escala que de alguna manera considere un subconjunto de objetos, los compare a pares y genere así la correspondencia de manera indirecta. En la Figura 2.3 a continuación, se pueden observar estas distinciones entre las escalas.

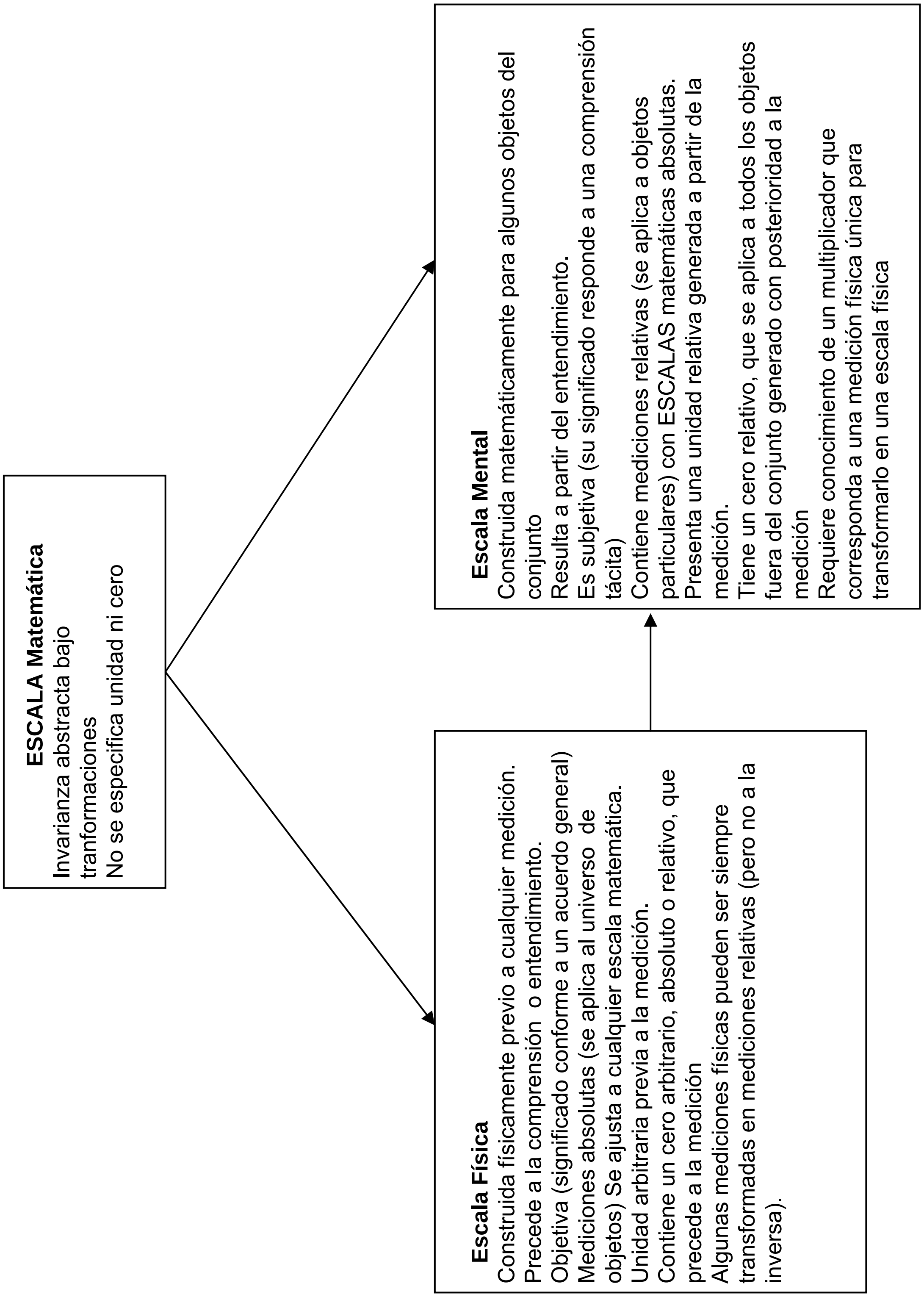

Figura 2.3: Clasificación de Escalas

Luis Thayer Ojeda 0180 | Of.1004
Providencia,Santiago, Chile
Teléfono: +56.2.234.1778
Fax: +56.2.231.9731
www.fulcrum.cl

Es importante hacer notar la relevancia del concepto de invariante en la medida, principio que permite transformar valores de una escala a otra sin perder el significado de lo medido. Dicho de otra forma, una medida realizada en un sistema coordenado "i", no debe verse alterada al cambiarse a otro sistema "j". Por ejemplo, para el caso de las escalas de intervalos, no es posible sumar dos números aunque sean de la misma escala. Comprobación: $y_1+y_2=(ax_1+b)+(ax_2+b)=a(x_1+x_2)+b+b=(a)x_3+\mathbf{2}b$, que no mantiene la forma ax+b por lo que no pertenece a una escala de intervalos perdiendo su condición de invariante. Luego, no es posible sumar, si bien sí es posible restar. Tampoco es posible multiplicar dos escalas diferentes sin salir de la escala y perder la característica del invariante: $y_1*y_2=(ax_1+b)*(ax_2+b)=a^2x_3^2+ab(x_1+x_2)+b^2$, que no es reducible a la forma ax+b.

Notar que, las escalas de utilidad, (muy utilizadas en economía) provienen de una función de utilidad, y por lo tanto, pertenecen a una escala de intervalos. Esto obliga a trabajar con ellas con el debido cuidado.

Por otro lado, para el caso de una escala proporcional, es muy fácil observar que y_1+y_2 mantiene la forma y=ax. Asimismo, la multiplicación de dos escalas de proporciones también mantiene la propiedad: $y_1*y_2=ax_1bx_2= abx_1x_2=cx_3$, la que corresponde a una nueva escala de razones y proporciones de razón igual a *"c"*. (Ejemplo: Trabajo = Fuerza x distancia). Si bien, se pueden sumar elementos de una misma escala de proporciones, la suma de dos escalas de proporciones diferentes no es válida, ya que se obtiene: ax_1+bx_2 , lo que no puede ser reducida a la forma ax.

El principio de la invarianza, es un principio base en las matemáticas y la física, inclusive Einstein en su modelo de relatividad debió buscar sus propios invariantes de transformación tetra dimensionales (espacio-tiempo), para poder hacer su transformación de sistemas de coordenadas. (Ecuaciones de transformación de Lorentz).

Es importante tener siempre presente que: *"las escalas deben ser construidas a partir de las medidas y no, las medidas a partir de las escalas"* [3], como ocurre muchas veces. Ejemplo de esto último, es cuando se evalúa a los alumnos con la escala tradicional de 1 a 7 y se presupone, sin mayor análisis, que dicha escala constituye efectivamente una medida proporcional, donde un 6 representa exactamente el doble de un 3, o que pasar de un 6 a un 7 es equivalente a pasar de un 1 a un 2. Lo que correspondería a la definición de una escala de tipo lineal (homogénea), y bien se sabe que la realidad en general, no es lineal ni homogénea.

Medidas Relativas (RM) y Medidas Absolutas (AM)

Los seres humanos han sido dotados genéticamente con el talento para comparar cosas y no parece probable que este talento nos deje. Necesitamos las comparaciones para sobrevivir, ya que no existen los absolutos. El *Analytic Hierarchy Process:* (AHP) es la forma de hacer estas comparaciones científicamente. Esta metodología deduce una escala de prioridades tras comparar objetos según su dominancia relativa con respecto a un atributo dado. Lo que aquí se establece es que aunque parezca *"sorprendente"*, primero se debe construir la métrica para las mediciones y sólo entonces (y no antes) se crea una unidad y un cero convenientes. Las mediciones están asociadas tradicionalmente con una escala física existente a partir de la cual a cada objeto se le

[3] Thomas L. Saaty-2005 (Paper de publicación en 8 Congreso: ISAHP-2005, Hawaii, USA)

asigna un número, acción que se efectúa uno a uno sobre cada objeto independientemente del número de objetos existentes. La medición es una transformación desde los objetos hacia los números, efectuada de a uno por vez. Pero, esto no siempre es necesariamente así, particularmente cuando la propiedad en cuestión es un intangible, y no existen escalas a priori que puedan ser utilizadas para efectuar la medición. En este caso, los objetos a ser medidos pueden utilizarse para determinar los valores de la escala que recibirían como grupo, (no individualmente). Esto implica que existe una diferencia entre tener una escala antes de efectuar las mediciones y la construcción de escalas como parte del proceso de medición. Hay una clara distinción que debe ser tomada en cuenta entre estos dos aspectos de las mediciones, y es importante que no se fuerce a una de ellas a cumplir con todas las propiedades de la otra. Las escalas relativas son mucho más generales, en el sentido que una medición efectuada en una escala física que posea una unidad, puede ser reducida a una medición relativa, pero no a la inversa. Al pasar de una escala física a una escala relativa, simplemente se descarta la información asociada al concepto de la unidad dimensional y del cero, lo que no afecta a los valores relativos (o prioridades) resultantes; son las mediciones relativas las que permiten medir intangibles.

En la toma de decisiones, los criterios deben ser medidos en términos relativos con respecto a los objetivos o niveles superiores para obtener sus pesos, y usarlos en combinación con las prioridades de las alternativas. Sin embargo, existe una segunda forma de medir, la que consiste en construir una escala de medida absoluta para las alternativas (un estándar de medida), para luego medir las alternativas por esta escala en forma independiente. Esta forma de medida se conoce como medida absoluta (AM) *(absolute measurement).* En estricto rigor esta segunda forma es una derivada utilitaria de la primera.

La medida absoluta es un concepto diferente al de medida relativa. Por ejemplo, cuando se usa una vara para medir una habitación se está utilizando una medida absoluta al aplicar la vara como un estándar. Las medidas absolutas son independientes, no se modifican por el hecho de medir otros elementos con la misma vara. El agregar o eliminar alternativas no modifica la medida.

En el AHP, la medida absoluta es la extensión de la idea de la vara, en que se utilizan diferentes varas en cada criterio. Las alternativas se miden contra los estándares en cada criterio terminal. Cada criterio terminal tiene asociado una escala de intensidades, a través de la cual se evalúa cada alternativa en términos absolutos**.**

Ejemplo: Criterio Terminal: Nivel de Experiencia

Escala Cualitativa	Escala Cuantitativa
Excepcional	15 o más años de experiencia
Mucha	Entre 8 y 14 años
Promedio	Entre 4 y 7 años de experiencia
Alguna	Entre 1 y 3 años de experiencia
Ninguna	Menos de 1 año de experiencia

En ambos casos debe transformarse la escala absoluta a una escala de razones normalizada (escala de proporciones), mediante la construcción de una función de transformación para cada escala. (detalles en capítulo 3, punto 3.4.3: construcción de la función de transformación). Es decir, nuevamente, una escala cuantitativa que contiene números en vez de descriptores no ha incrementado las propiedades matemáticas de la escala.

Al hacer la transformación se obtiene:

E. Cualitativa	E. Cuantitativa	E. Proporcional
Excepcional	15 o más años	0,4886
Mucha	Entre 8 y 14 años	0,2841
Promedio	Entre 4 y 7 años	0,1640
Alguna	Entre 1 y 3 años	0,0538
Ninguna	Menos de 1 año	0,0341

Notar que el paso de nivel entre el rango (4 a 7) años al rango (8 a 14) años, tiene una proporcionalidad numérica (razón) de 2.0. Pero, en la escala de razones real, esta disminuye a 1.73 (13,5% de diferencia). Estas diferencias de razones entre escalas con y sin métrica son muy comunes, (y normalmente mayores a la del ejemplo). Esto, obliga a realizar el proceso aquí descrito para construir una métrica donde ésta no exista o no sea compartida.

Finalmente, como una forma de recordar las diferencias entre la medida relativa y la absoluta, se puede revisar la siguiente figura 2.4:

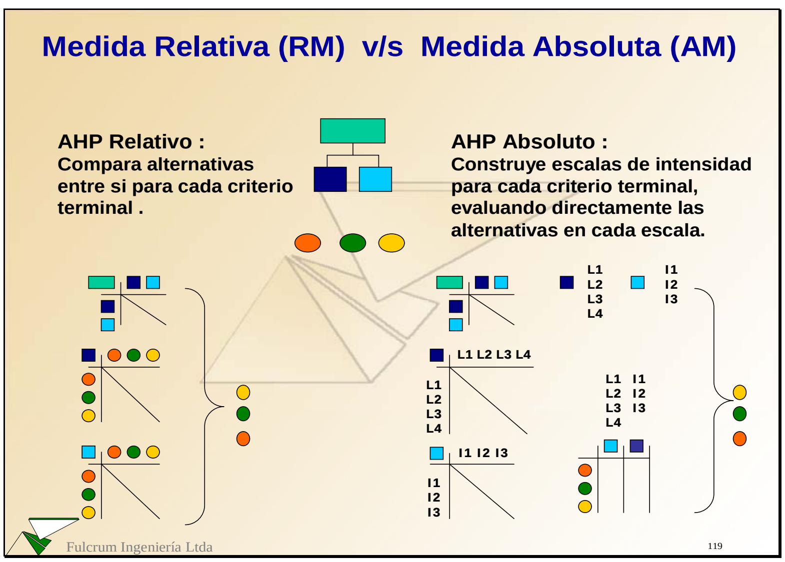

Figura 2.4: Comparación entre medida relativa y absoluta

Nota: los círculos representan alternativas y los rectángulos criterios.

Justificación de la Escala Absoluta o Fundamental de Saaty

La tabla 2.5 a continuación entrega la Escala Fundamental de Saaty utilizada para emitir los juicios de comparación entre elementos homogéneos. Los juicios son entregados primero de manera verbal como se indica en la escala, luego se le asocia un número de tipo proporcional absoluto (intensidad 4 es el doble a intensidad 2). El vector de prioridades de esta matriz, es el vector propio principal de la matriz. Este vector entrega las prioridades relativas de los criterios medido en una escala de proporciones.

Luis Thayer Ojeda 0180 | Of.1004
Providencia,Santiago, Chile
Teléfono: +56.2.234.1778
Fax: +56.2.231.9731
www.fulcrum.cl

Esto es, estas prioridades son únicas con un factor multiplicativo único constante positivo. Sin embargo, si se impone que la suma de estas prioridades sea la unidad, entonces estos números además de únicos, pertenecen a una escala de números absolutos, lo que significa que no pierden la propiedad de unicidad, a diferencia de las escalas de intervalos o de razones que pueden ser transformadas en otras escalas de intervalos o de razones respectivamente y conducir a diferentes números con el mismo significado (perdiendo la propiedad de unicidad). Una escala absoluta (con la propiedad de unicidad), se caracteriza por ser invariante bajo la transformación identidad, esto es, sus números no pueden ser cambiados a otros y significar lo mismo. Por ejemplo, 2Km y 2.000m son diferentes números si bien significan lo mismo;, esto es así, porque la distancia es una escala de razones no absoluta, pero si se sabe que la distancia entre A y B es 3 veces la distancia entre B y C, este 3, aparte de ser un número que representa una proporción, es un número de tipo absoluto, es decir, no importa en que unidad de longitud se midan las distancias entre A, B y C, el número 3 no cambiará, (siendo éste un invariante adimensional). Las prioridades pueden ser derivadas a partir de este tipo de números, las que a su vez, también pertenecerán a una escala absoluta de números relativos cuya suma total es a la unidad.

Escala Fundamental	
1	Igual importancia
3	Importancia moderada de uno sobre el otro
5	Importancia fuerte o esencial
7	Importancia muy fuerte o demostrada
9	Importancia extrema
2,4,6,8	Valores intermedios
1.1-1.9	Cuando los elementos se hallan muy cercanos
Valores recíprocos para comparaciones inversas	

Tabla 2.5 Escala Fundamental de Saaty

La escala de valores enteros de respuesta anterior, (utilizada para llenar la matriz con los juicios de comparaciones a pares), puede ser derivada a partir de la conocida función logarítmica de respuesta psicofísica de Weber-Fechner, tal como se explica a continuación. Para un valor de estímulo dado, la magnitud de la respuesta permanecerá inalterada hasta que el valor del estímulo sea incrementado lo suficiente en proporción al valor del estímulo, preservando entonces la proporcionalidad de los incrementos relativos del estímulo para hacerlo detectable a una nueva respuesta. Este esquema sugiere el concepto de las "*diferencias mínimas perceptibles*", conocidas en psicología. Entonces, al comenzar con un estímulo s_0 las magnitudes incrementales sucesivas de nuevos estímulos $s_1, s_2, \dots, s_n$ relativas a s_0 tomarán la forma:

Luis Thayer Ojeda 0180 | Of.1004
Providencia,Santiago, Chile
Teléfono: +56.2.234.1778
Fax: +56.2.231.9731
www.fulcrum.cl

$$s_1 = s_0 + \Delta s_0 = s_0 + \frac{\Delta s_0}{s_0} s_0 = s_0(1+r)$$
$$s_2 = s_1 + \Delta s_1 = s_1(1+r) = s_0(1+r)^2 \equiv s_0\alpha^2$$
$$\vdots$$
$$s_n = s_{n-1}\alpha = s_0\alpha^n (n = 0,1,2,...)$$

Se debe considerar que las respuestas a estos estímulos serán medidos en una escala de proporciones (m=ax+b, con: a>0, b=0). Una respuesta genérica tendrá la forma, $M_i = a\log\alpha^i$ *i* =1,…,*n*, o de uno a uno, tendrán la forma:

$$M_1 = a\log\alpha, M_2 = 2a\log\alpha, ..., M_n = na\log\alpha$$

Al tomar las razones $M_i / M_{1,}$ de estas respuestas, (en que el primero corresponde al menor y sirve de unidad de comparación), se obtienen los valores enteros 1, 2,…, n de la escala fundamental del AHP. Lo anterior pareciera indicar que los números son intrínsicos a nuestra habilidad de hacer comparaciones, y que estos no fueron una invención o abstracción de nuestros ancestros, sino más bien vienen incorporados en nuestro cerebro como parte del proceso evolutivo. Esto, está muy bien expuesto en el libro: *The Number Sense.*[4]

Desde un ángulo menos matemático, se puede notar que los seres humanos tenemos la capacidad de distinguir en términos ordinales entre alto, medio y bajo en un nivel, y que bajo cada uno de estas clasificaciones, en un nivel inferior, se puede nuevamente distinguir entre alto, medio y bajo dando un total de nueve categorías diferentes. Si se asigna el valor de uno al par (bajo, bajo) que corresponde al menor de todos y el valor nueve al par (alto, alto) que corresponde al mayor, estará cubierto todo el espectro de posibilidades entre los dos niveles, dando el valor de nueve al máximo de la escala de comparaciones a pares al compararlo con el valor mínimo de la escala (uno). Además, producto del incremento de la inconsistencia al comparar más de 7 elementos, no es necesario recordar más de 7 ± 2 elementos, (lo que ya había sido conjeturado por el psicólogo George Miller en la década del cincuenta). De esta forma, la escala así derivada, quedará ligada en términos representativos a la intensidad o grado de importancia que presenten los juicios emitidos.

2.5 Algebra de Matrices. Valores y Vectores

Algebra de Matrices

Primero, se recordarán algunas características básicas de su definición y funcionamiento, luego se revisarán algunas restricciones necesarias para obtener resultados no triviales o nulos. Con esto, se verán algunas interpretaciones para la formulación del problema de valores y vectores propios, y qué relación tienen éstos con las propiedades de las matrices. Finalmente, se analizarán algunas de las propiedades

[4] Ver Anexos, punto 9.3, Bibliografía

presentes en las matrices particulares que se utilizan en AHP y sus repercusiones en los resultados.

Entendida la operatoria anterior, y fundamentalmente su planteamiento, ya que operaciones correctas efectuadas sobre un problema mal planteado con dificultad conducirán a un resultado correcto, es posible resolver manualmente algunos problemas sencillos. La práctica en el área de toma de decisiones, ha demostrado que rara vez los problemas reales se formulan y resuelven de forma básica, pero esto permitirá mayor claridad en la medida que la estructura del problema crece y se vuelve más compleja. Además permitirá destacar como se manejan algunos conceptos no relacionados con la estructura del problema en sí, sino con las votaciones realizadas por los decisores, especialistas, técnicos u otros actores involucrados en distintas etapas del proceso.

Si bien al principio algunos de los conceptos serán muy simples, a medida que se profundice en sus propiedades se podrán vislumbrar conexiones interesantes con áreas distintas del conocimiento y comprender el potencial subyacente en esta metodología, de aparente simpleza.

Notación matricial

Las matrices son arreglos rectangulares de números y se pueden entender como una aplicación que toma a un vector en un espacio (digamos por ejemplo en $R^{n,}$ que se anota: $\{v\}_{nx1}$), le efectúa alguna modificación y lo lleva a otro espacio (digamos por ejemplo R^m, que sería $\{w\}_{mx1}$), donde m y n son números enteros estrictamente positivos. La operación anterior es:

$$\left[A\right]_{mxn}\{v\}_{nx1} = \{w\}_{mx1}$$

donde decimos que $\{v\}_{nx1}$ es un vector de n coordenadas, $\{w\}_{mx1}$ es un vector de m coordenadas, ambos escritos como columnas, y $\left[A\right]_{mxn}$ es una matriz de m filas y n columnas.

Es fácil entender por ejemplo, que si m<n está ocurriendo una especie de “proyección”, pues un vector de un espacio “grande” pierde algunas de sus coordenadas y es llevado a un espacio de menor dimensión. Al revés ocurre cuando m>n, pues en este caso, el vector inicial es introducido en un “hiperespacio” con muchas más coordenadas (dimensiones) que las iniciales, donde recibirá nuevas componentes, miembros y grados de libertad. En el caso en que m=n, el vector inicial es transformado en otro vector dentro del mismo espacio original, pudiendo por ejemplo, haber sido rotado, trasladado, reflejado, invertido, etc.

Resolución de sistemas de ecuaciones

Cualquier sistema de ecuaciones lineales, es decir de la forma y = ax+b, puede generalizarse a: $\left[A\right]\{x\} =\{b\}$, donde el vector {x} reúne a todas las incógnitas, $\left[A\right]$ reúne a todos los ponderadores y {b} por su parte, se hace cargo de todos los términos libres. Explicitando a qué espacio pertenecen cada uno de estos elementos se tiene:

$$\left[A\right]_{nxm}\{x\}_{mx1} = \{b\}_{nx1} \qquad [4.1]$$

Es posible ver que los vectores (que se pueden interpretar también como matrices de dimensión nx1), pueden sumarse y restarse con otros vectores de su misma dimensión y pueden multiplicarse con matrices cuya cantidad de columnas sea igual a las coordenadas del vector. También es inmediato observar que la conmutatividad del producto no rige, ni entre matrices y vectores, ni entre matrices entre sí, de hecho en algunos casos ni siquiera está definida como operación. La operación de producto de vectores no está unívocamente definida, sino que a través del concepto de trasposición (de una matriz o un vector), y que se puede visualizar como "intercambiar columnas por filas y viceversa". Así, $[A]_{nxm}$ tiene como traspuesta a $[A]^t_{mxn}$ que corresponde a "efectuar una reflexión sobre la diagonal virtual de la matriz", ya que la trasposición es una operación que se puede efectuar sobre cualquier matriz, no necesariamente cuadrada, y por lo tanto en la que el concepto de diagonal, no necesariamente corresponde a las posiciones a_{ii}. De la misma forma, con una reflexión aún más sutil, la traspuesta de un vector $\{x\}_{mx1}$ es el vector $\{x\}^t_{1xm}$, que se escribe en general, de forma horizontal.

De esta manera, si $[A]_{nxm}$ y $[B]_{mxq}$ sólo la operación $[A]$x$[B]_{nxq}$ está definida, y el producto de $[B]$x$[A]$ no se puede hacer.

También es fácil observar que si $\{b\}_{nx1}$, el producto $\{b\}^t$x$\{b\}$ corresponden a la conocida operación de "producto punto o producto interno", que da como resultado un real $\{c\}_{1x1}$, en tanto que $\{b\}$x$\{b\}^t$ entrega como resultado una matriz $[C]_{nxn.}$

De la misma manera, el concepto de "elevar a potencias" debe realizarse con cuidado, pues para la matriz anterior $[A]_{nxm,}$ la operación de elevar al cuadrado (completamente simétrica para valores reales) no puede hacerse más que a través de su matriz traspuesta, pudiendo obtenerse dos resultados diferentes: $[A]^2_{nxn} = [A]_{nxm}$x$[A]^t_{mxn,}$ o bien $[A]^2_{mxm} = [A]^t_{mxn}x[A]_{nxm.}$

Evidentemente muchos de estos conceptos se simplifican cuando se trata con matrices cuadradas, como se verá más adelante.

Volviendo al problema de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, es fácil ver que al resolver el sistema $[4.1]$ pueden darse, al menos, tres situaciones:

a) *caso en que n>m***,** lo que significa que hay más ecuaciones (n) que incógnitas (coordenadas de {x}) En la mayor parte de los casos, esto implica que no habrá solución para el sistema de ecuaciones a menos que haya filas linealmente dependientes en la matriz, lo que significa que hay información repetida de manera más o menos evidente. Como ejemplos

- el caso de $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$

  en que la tercera fila no aporta más información que la primera y por lo tanto existe solución única.

- el caso de $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$

  en que simplemente no hay solución, y que será el caso más general cuando n>m

b) *caso en que n<m*, en este caso, el vector {x} es el largo y hay muchas más incógnitas que ecuaciones. Esto implica que no habrá solución única para el sistema de ecuaciones y utilizando las coordenadas incógnitas “sobrantes” como parámetros, se pueden obtener tantas soluciones como se desee. Como ejemplos:

- el caso de $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ en que no hay solución
- el caso más general en que $\begin{bmatrix} 1 & \cdot 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$

en que hay infinitas soluciones. Basta darle distintos valores a z, para encontrar soluciones diferentes al sistema de 2x2 restante.

c) *caso en que n=m*, que suele ser el caso más interesante, pues hay tantas incógnitas como ecuaciones y eso en la mayoría de los casos implicará que existe solución y es única. Por supuesto, puede haber casos en que

- no hay solución, como en $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$
- hay infinitas soluciones, como en $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$
- hay solución única, como en $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

En este último caso, ocurre algo adicional responsable de la existencia y unicidad de la solución (características siempre deseadas en la búsqueda de soluciones), y esto es que la solución puede obtenerse calculando la inversa de la matriz A (que por ser matriz cuadrada, es firme candidata a tener inversa).

En efecto, si $[A]$ tiene inversa, entonces la solución es $\{x\}_{nx1} = [A]^{-1}_{nxn} \{b\}_{nx1}$. Pero hay casos en que A, a pesar de ser cuadrada, no tiene inversa (como en los dos primeros ejemplos). De manera, que como conclusión, lo más deseable para la resolución de sistemas de ecuaciones con lado derecho distinto de cero, es que la matriz A sea invertible, por lo que es posible conocer la solución del problema planteado.

Pero, que pasa cuando se trata de una ecuación homogénea, esto es, con lado derecho nulo?. En este caso, $[A]_{nxn}\{x\}_{nx1} = \{0\}_{nx1}$, pero si la matriz A resulta ser invertible, la solución existirá, será única y en general inútil. Efectivamente, la única solución será $\{x\}_{nx1} = [A]^{-1}_{nxn} \{0\}_{nx1} = \{0\}_{nx1}$, que no suele ser de gran provecho. De manera que en general, para sistemas homogéneos, interesarán los casos en los que la matriz $[A]$ no sea invertible, para que, de existir solución al sistema de ecuaciones, ésta sea no trivial, es decir, diferente a la solución nula.

Valores y vectores propios

Luis Thayer Ojeda 0180 | Of.1004
Providencia,Santiago, Chile
Teléfono: +56.2.234.1778
Fax: +56.2.231.9731
www.fulcrum.cl

Otro gran conjunto de problemas que suelen resolverse a través de una formulación matricial, tienen relación con los valores y vectores propios. Aquí la idea es encontrar los valores de $\{w\}_{nx1}$ y de λ que verifiquen la siguiente ecuación:

$$[A]\{w\} = \lambda\{w\} \qquad [4.2]$$

Donde $[A]$ es una matriz cuadrada de nxn, {w} pertenece a R^n y λ es un escalar.

Esta ecuación no es exactamente del tipo de las anteriores, ya que no es lineal (hay un producto de incógnitas (λ x{w})) y además tiene más incógnitas λ+{w}, (1+n) incógnitas que ecuaciones (n). Una complicación. Sin embargo, esta ecuación en términos simples, se puede leer como ¿cuál será el escalar λ, que al ponderarlo por un vector {w} genera sobre él, el mismo resultado que toda la matriz A? (consolidación de la información de toda una matriz en un escalar) ó ¿cuál será el vector {w} que al ser transformado por la matriz A, se mantiene paralelo a si mismo? (el escalar λ actúa como un ponderador, luego no producirá ningún cambio en la proporcionalidad o dirección al vector {w}).

Si se considera a λ en primer lugar, lo intuitivamente directo es que λ depende de $[A]$, es decir si se cambia de matriz, λ el "representante escalar de la matriz R^nx R^n", también debe cambiar. Caben varias preguntas: ¿será λ único o habrá varios? Si no es único, ¿serán finitos o infinitos? ¿ será λ un real o un número complejo?

Por otro lado, al identificar a un λ, qué pasa con el vector {w}? En virtud que hay más incógnitas que ecuaciones, parece evidente también que {w} debe depender de λ. Así, si λ cambia, sólo algunos vectores estarán en condiciones de adaptarse a este cambio para mantener la igualdad de la relación $[4.2]$.

Al llevar la formulación general del problema de valores y vectores propios, al formato de ecuación homogénea utilizado para la resolución de los sistemas de ecuaciones se genera la siguiente ecuación $[4.3]$:

$$[A]\{w\} - \lambda\ [\mathrm{I}]\ \{w\} = \{0\} \qquad [4.3]$$

De donde
$$([A] - \lambda\ [\mathrm{I}])\ \{w\} = \{0\}$$

De aquí, resulta natural observar que, al igual que en el caso de los sistemas de ecuaciones lineales, se requiere que la matriz ($[A]$-λ $[\mathrm{I}]$) sea no invertible, a fin de contener una solución distinta de la nula.

Por Álgebra Lineal, es sabido que si una matriz no es invertible, entonces su determinante es igual a cero y también que la inversa de una matriz se define como:

$$[A]^{-1} = \frac{adj([A])}{\det([A])} = \frac{adj([A])}{|A|}$$

Donde $adj([A])$ es la matriz transpuesta de cofactores de $[A]$.

Es necesario que la matriz no sea invertible, y por lo tanto, se deben identificar los valores de λ, para los cuales se tiene que:

Luis Thayer Ojeda 0180 | Of.1004
Providencia,Santiago, Chile
Teléfono: +56.2.234.1778
Fax: +56.2.231.9731
www.fulcrum.cl

$$\det \mathbf{(}[A] - \lambda\ [\mathrm{I}]\mathbf{)} = \mathbf{0} \qquad [4.4]$$

lo que lleva a desarrollar la expresión del determinante de ($[A]$-λ $[\mathrm{I}]$), que resulta ser un polinomio de grado n en función de λ (polinomio característico). Los valores que harán que ese polinomio tome el valor 0, son las raíces del polinomio, que podrán ser reales o complejas y habrán a lo más n raíces diferentes. Una vez que se han encontrado los valores propios de la matriz $[A]$**,** se reemplazan uno a uno en la ecuación $[4.3]$, lo que genera en cada caso una matriz de números, y se procede a buscar el vector {w} que verifica la igualdad a cero. Cada vector así encontrado, llamado vector propio, está relacionado con un solo valor de λ**,** y por lo tanto, a lo más habrá n vectores propios diferentes.

En el caso general, en que $[A]$ es una matriz cualquiera, las formas del polinomio característico, y los tipos de raíces pueden tener las más variadas formas: reales, múltiples, complejas y combinaciones de todas las anteriores. Pero, en el caso del AHP, la matriz $[A]$ no es cualquiera, sino que tiene propiedades bien definidas, lo que lleva a ciertas formas especiales del polinomio característico. Estas buenas propiedades se traspasarán a la matriz ($[A]$ - λ $[\mathrm{I}]$), de manera, que se obtendrán también buenas características para los valores propios (los diferentes valores de λ) que satisfacen la ecuación $[4.4]$ y por lo tanto los vectores propios asociados también serán particulares.

Así, la matriz de comparaciones a pares $[A]$ es una matriz cuadrada, con valores en sus celdas provenientes de la Escala Fundamental del AHP, lo que significa que todos sus valores son estrictamente positivos, y que tendrá solamente unos en la diagonal.

Entonces, $[A]$ es:

- cuadrada
- estrictamente positiva
- recíproca (ver 1º axioma del AHP)
- homogénea (ver 2º axioma del AHP, por lo que los valores de sus celdas estarán, en general, acotados por 1/9 y 9)

Para poder analizar estas buenas propiedades, a continuación se resumen algunas definiciones y presentan los teoremas principales de los que deriva el AHP :

Definiciones:. Se dice que una matriz $[A]$ cuadrada es:

- positiva: si $a_{ij} > 0$, $\forall i,\ j = 1,\ldots,n$
- recíproca: si $a_{ij} = 1/a_{ji}$ $\forall i,\ j = 1,\ldots,n$, con $i \neq j$ y $a_{ij} = 1$, $\forall i = 1,\ldots,n$,
- consistente: si $a_{ik} = a_{ij} \times a_{jk}$ $\forall i,\ j, k = 1,\ldots,n$

Propiedades, Teoremas y Resultados

Luis Thayer Ojeda 0180 | Of.1004
Providencia,Santiago, Chile
Teléfono: +56.2.234.1778
Fax: +56.2.231.9731
www.fulcrum.cl

Teorema 1: de Perron-Frobenius: Si $[A]$ es una matriz recíproca y positiva, entonces:

a) $[A]$ tiene un valor propio real, simple y positivo, λ_{max}, que no es excedido en módulo por ningún otro valor propio real o complejo.

b) todas las componentes del vector propio {w} asociado a λ_{max}, son positivas

c) λ_{max}, llamado valor propio principal (o raíz de Perron) cumple:

$$\min_j \left(\sum_i \text{ fila i de } [A]\right) \leq \lambda_{max} \leq \max_j \left(\sum_i \text{ fila i de } [A]\right) \text{ y además}$$

$$\lambda_{max} = \text{Lim (traza } [A]^k)^{1/k}\text{, cuando } k \rightarrow \infty,$$

Este teorema dice que si $[A]$ es una matriz recíproca y positiva, entonces a) $[A]$ tiene un valor propio simple (es decir, no es una raíz múltiple del polinomio característico), más grande que todas los demás valores propios y ese λ_{max} es real (no es complejo)

b) λ_{max} da origen a un vector propio con coordenadas positivas exclusivamente

c) λ_{max} puede obtenerse de manera analítica cuando la matriz A ha terminado de iterar como la raíz k-ésima de la traza de la matriz $[A]^k$. Recordar que la traza de una matriz cuadrada, es simplemente la suma de los elementos de la diagonal. Y además, si se suman todos los elementos de cada fila, λ_{max} está acotado inferiormente por el mínimo de dichos valores y está acotado superiormente por el máximo de dichos valores.

Teorema 2: Si $[A]$ es una matriz consistente y positiva, entonces: Rango ($[A]$) = 1 y a_{ij} = 1, $\forall i = 1,...,n$.

Observar que no se impone que $[A]$ sea recíproca, por lo tanto el hecho de tener sólo "1" en la diagonal, en este caso, no es evidente. Rango ($[A]$) = 1 significa que sólo una fila o columna es linealmente independiente, el resto son combinaciones lineales de la anterior.

Teorema 3: Si $[A]$ es una matriz consistente, entonces $[A]^k = n^{k-1}[A]$

Notar que si $[A]$ es consistente, no es necesario iterar para encontrar el valor propio principal, ya que este se encuentra en el estado inicial (k=1) de la matriz. El concepto de iteración de la matriz $[A]$ proveniente de las comparaciones a pares, se requiere precisamente, porque en la mayoría de los casos, la matriz no será completamente consistente, es decir, habrán pequeñas variaciones o perturbaciones con respecto del orden de preferencia y a la intensidad de dicha preferencia cuando se analizan las comparaciones a pares entre diferentes parejas de criterios. Al elevar estas matrices a potencias sucesivas, el efecto de las perturbaciones se va diluyendo, a la vez que los juicios emitidos con respecto a los criterios se van complementando con los juicios emitidos en otras comparaciones en las que alguno de los criterios intervino. Tras algunas iteraciones, la matriz $[A]^k$ converge (se estabiliza) y es posible calcular sus valores y vectores propios. Afortunadamente, este proceso es efectuado internamente vía software, de manera que se obtiene simplemente el resultado final del proceso.

Teorema 4: Si λ_1, λ_2, ... λ_n son los valores propios de $[A]$, y si a_{ij} = 1 $\forall i = 1,\dots,n$., entonces

$$\sum_i \lambda_i = \mathrm{tr}\,([A]) \text{ y } \det([A]) = \Pi \lambda_i$$

Este es un resultado conocido para matrices cuadradas con diagonal = 1 (notar que la matriz $[A]$ no tiene aquí ninguna otra buena propiedad).

Teorema 5: Si $[A]$ es una matriz positiva y recíproca, entonces
$[A]$ es consistente $\Leftrightarrow \lambda_{max}$ = n y el resto de los λ_i= 0

Aquí, la matriz $[A]$ es consistente, desafortunadamente la matriz $[A]$ de juicios por comparaciones a pares casi nunca lo será, pero sí lo será la matriz que se obtiene de iterar y calcular el límite de $[A]^k$, cuando k$\rightarrow\infty$,(lo que para efectos prácticos es suficiente). Por lo anterior, y dado que se trata de un proceso iterativo, en la mayoría de los casos, en que $[A]$ no sea consistente y con un k relativamente grande, se tendrá: $\lambda_{max} \approx$n y el resto de los $\lambda_i \approx$ 0.

Teorema 6:
a) Si $[A]$ es una matriz recíproca y consistente, entonces cualquier columna de $[A]$ es solución del problema $[A]$\{w\} = λ\{w\}
b) Si $[A]$ es una matriz recíproca e inconsistente entonces,

$$\{w\} = \text{Lim } [A]^k e \,/\, (e^T [A]^k e)\text{ , cuando } k\rightarrow\infty$$

La parte a) de este teorema, señala que si la matriz es recíproca y consistente, los vectores propios se obtienen a partir de cualquier columna de la matriz (motivo por el cual es tan simple obtener vectores propios, para matrices consistentes: basta normalizar cualquier columna).

Si la matriz $[A]$ ha incorporado todas las votaciones a pares con respecto a todos los criterios que cuelgan de un nodo padre, el vector propio principal (es decir el vector propio asociado al valor propio principal), una vez normalizado, contiene las prioridades resumen de los juicios y los pesos locales con la que los criterios hijos se distribuyen la intensidad asociada al criterio padre.

Es fácil ver que esta obtención de prioridades a través del vector propio principal, es completamente diferente a una asignación de valores a priori, ya sea sobre la base de la experiencia, el conocimiento, la intuición o cualquier otro mecanismo, ya que con esta metodología, las prioridades son deducidas a partir de un proceso sistemático, y en el que es difícil tratar de imponer intensidades de preferencia sin ser delatado por alguna de las herramientas que los diferentes paquetes de software existentes han dispuesto para ello.

Luis Thayer Ojeda 0180 | Of.1004
Providencia,Santiago, Chile
Teléfono: +56.2.234.1778
Fax: +56.2.231.9731
www.fulcrum.cl

Prioridades

Un caso de aplicación de lo anterior, es por ejemplo, cuando se efectúan las comparaciones a pares entre criterios de la jerarquía en AHP y se completa la matriz de dichas comparaciones. Si los criterios A, B y C descomponen un criterio padre común, se realizan comparaciones a pares entre estos criterios en relación a su importancia con respecto del criterio padre y mediante el proceso de valores y vectores propios ya descrito, se obtienen sus prioridades, que representan su importancia con respecto dicho criterio padre. Con el apoyo de las herramientas matemáticas que se han revisado más la rapidez computacional de un software adecuado, se obtiene el orden de importancia de los criterios (tema que quizás se podría haber deducido sin necesidad de matrices) y en adición, las componentes del vector propio asociado al valor propio principal de esa matriz, que corresponden a una medida de la intensidad de tales importancias. Así, por ejemplo, no es lo mismo que los criterios A, B y C correspondan a las prioridades:

$$\{w_1\}= \begin{Bmatrix} 0.411 \\ 0.216 \\ 0.373 \end{Bmatrix} \quad \text{que} \quad \{ w_2\}= \begin{Bmatrix} 0.825 \\ 0.0872 \\ 0.0878 \end{Bmatrix}$$

Es fácil notar, que a pesar de tener el mismo orden (A>C>B), el segundo resultado muestra que las criterios B y C, están muy cercanos entre sí. Si estos vectores correspondieran, por ejemplo, a precios de alternativas A, B y C para un cierto modelo de costos, la información que proporcionan ambos vectores es muy distinta. Y si se tratara de miles de euros, es posible que se considerara revisar con más cuidado las votaciones emitidas en el proceso, ya que en el segundo caso, las alternativas B y C se pueden considerar prácticamente iguales y seguramente, será materia de otras consideraciones encontrar la razón que discrimine entre ellas y permita tomar la mejor decisión.

Adicionalmente al problema anterior, las intensidades obtenidas a través del proceso de votaciones y comparaciones a pares, deben ser revisadas, para ver si realmente reflejan la "percepción" de las importancias relativas entre los elementos para los participantes. Para mayor claridad, un ejemplo sencillo.

Se desea comprar una impresora, y uno de los criterios terminales del modelo de decisión es el criterio de "costo del equipo". Con respecto a esta variable, se miden las 3 alternativas: A, B y C (el argumento es idéntico si en lugar de comparar las alternativas se comparan subcriterios de un nodo dado).

Recordar, que este criterio es sólo uno de los utilizados para decidir, y que hay muchas otras variables que podrían forman parte de esta estructura de decisión (por ejemplo: costo del servicio técnico, de las reparaciones menores, de los insumos, periodicidad de reemplazo de piezas, depreciación, imagen de la marca, etc.).

Si se acepta que la percepción de los precios (en este caso la escala de la variable "Costo de la Impresora"), coincide con el monto de esos costos, y se dispone de sus valores de mercado (A cuesta \$50.000, B cuesta \$55.000 y C cuesta \$95.000), entonces para este criterio, el vector de prioridades (normalizadas) es:

$$\{w\} = \begin{Bmatrix} 0.411 \\ 0.373 \\ 0.216 \end{Bmatrix}$$

Lo que indica que si se eligiera sólo por este criterio, la alternativa A se llevaría el 41.1% de las preferencias, la B el 37.3% y la C el 21.6%. Pero: ¿estas relaciones entre las componentes del vector: reflejan realmente la "percepción de los precios" por parte de los decisores? Comparando las características de estas 3 impresoras para dicho criterio, la matriz de comparación utilizando la escala de Saaty podría tomar la siguiente forma:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1/6 & 1/6 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Donde se indica que para los participantes, los costos de las impresoras A y B son similares, pero que ambas son entre "fuerte y muy fuertemente preferibles a C"; es decir, la proporción reflejada por los precios de mercado no coincide con el juicio emitido, indicando que la impresora C es "muy cara con respecto a las otras dos". Esto sin embargo, sí queda reflejado en el vector propio asociado a dicha matriz de comparaciones y que corresponde a:

$$\{w\} = \begin{Bmatrix} 0.461 \\ 0.461 \\ 0.078 \end{Bmatrix}$$

De manera que si sólo se decidiera con este criterio, la impresora C tendría sólo un 7.8% de las preferencias frente al 46.1% de las otras dos. Este vector **sí** representa la percepción de la importancia del precio con respecto a la decisión. Es necesario que esta revisión de "lo que significan" los resultados de cada votación, se efectúe cada vez, para ver si ellos guardan relación con las percepciones de los integrantes que han participado en las comparaciones. Si estos elementos no reflejan las percepciones de los involucrados, las distintas comparaciones deberán revisarse antes de seguir. El vector propio resultante de la matriz de comparaciones a pares, debe ser validado por los que participaron en el proceso, pues de no ser así las prioridades podrían estar distorsionadas y el ranking final de alternativas podría no reflejará la correcta evaluación de cada una con respecto al objetivo global planteado.

Teoría de Grafos

El vector propio como un operador sistémico a partir de un grafo.

Es interesante constatar que utilizando otra teoría totalmente diferente se llega también a los mismos resultados respecto de la representatividad del vector propio como un operador sistémico capaz de representar las preferencias de uno o más decisores a partir de un conjunto de juicios ordenados en comparaciones a pares, pero de una forma gráfica.

Considérese por ejemplo, la siguiente matriz de juicios consistente [A], conformada por comparaciones a pares

	X	*Y*	*Z*
X	1	2	6
Y	1/2	1	3
Z	1/3	1	1

En la interpretación gráfica de esta matriz (figura 2.6), el largo del arco entre el nodo *X* y el nodo *Y*, corresponde a la intensidad de preferencia de *X* sobre *Y*, (en este caso igual a 2), entregada por el decisor. Luego, la matriz A^1 Puede ser interpretada como la matriz de intensidad de largo 1 (para ir desde *X* hasta cualquier otro nodo en un solo paso).

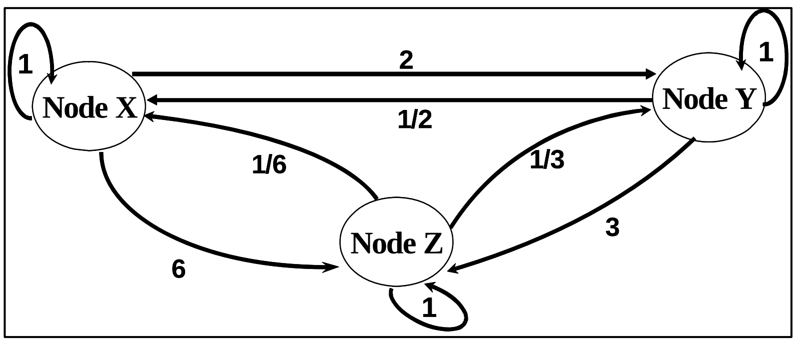

Fig. 2.6: Representación gráfica de la matriz de comparaciones a pares

Si en la figura 2.6, se consideran todos los caminos de largo 2 para ir desde el nodo *X* a cualquier otro (incluyéndose él mismo), se tienen diferentes caminos alternativos para hacerlo:

Camino *X-X-X* : Intensidad de largo = 1 * 1 = 1
Camino *X-Y-X* : Intensidad de largo = 2 * (1/2) = 1
Camino *X-Z-X* : intensidad de largo = 6 * (1/6) = 1

Por lo tanto, la intensidad de largo desde el nodo *X* hasta el nodo *X* considerando todos los posibles caminos de largo 2 es: 1 + 1 + 1 = 3, lo que implica que $a^2_{11} = 3$. Al tomar el promedio (el promedio de los diferentes caminos) se tiene: (3/3) = 1, y se tiene nuevamente el mismo valor de la matriz [A] en la posición (1,1), que es el resultado esperado para una matriz consistente.

A su vez, la intensidad de preferencia del nodo *X* al nodo *Y*, considerando todos los posibles caminos de largo 2 corresponde a la suma de las intensidades de largo 2:

Camino *X-X-Y* : Intensidad = 1 * 2 = 2
Camino *X-Z-Y* : intensidad = 6 * (1/3) = 2
Camino *X-Y-Y* : intensidad = 2 * 1 = 2

Por lo tanto: a^2_{12} = 2+2+2=6.

Luis Thayer Ojeda 0180 | Of.1004
Providencia,Santiago, Chile
Teléfono: +56.2.234.1778
Fax: +56.2.231.9731
www.fulcrum.cl

Nuevamente, al tomar el promedio de estas intensidades (caminos) se obtiene: (6/3)=2, y se recupera el mismo valor de la matriz en la posición (1,2), que es lo esperado en una matriz 100% consistente.

Al generalizar y escribir $A^k = a^k_{ij}$ como la matriz de intensidades de las preferencias de largo k, se aprecia que en la medida que k aumenta, más caminos de mayor largo serán considerados en el cálculo, producto de la interacción entre los nodos. La columna j de A^k representa la intensidad de preferencia total del k-ésimo camino en la k-ésima iteración. La columna j normalizada, representa las importancias relativas del resto de los nodos para todos los caminos de largo k, usando como referencia al nodo j. Para el caso en que A es consistente, cada columna de A normalizada corresponde a las preferencias de A^k normalizada. ($A^1 = A^2 = \ldots = A^k$). Como ejemplo, se muestran los valores normalizados para la segunda iteración, que corresponde a los valores normalizados de la primera iteración

A^1			A^1 normalizado		
1	2	6	1/(10/6)	6/(10/3)	6/10 = 0,6
1/2	1	3	1/2/(10/6)	1/(10/3)	3/10 = 0,3
1/6	1/3	1	1/6/(10/6)	1/3/(10/3)	1/10 = 0,1

A^2			A^2 normalizado		
3	6	18	3/5 = 0,6	6/10 = 0,6	18/30 = 0,6
3/2	3	9	1,5/5 = 0,3	3/10 = 0,3	9/30 = 0,3
1/2	1	3	0,5/5 = 0,1	1/10 = 0,1	3/30 = 0,1

Fig. 2.7: Iteración número dos para la evaluación del vector propio (vector de preferencias)

Cuando A no es consistente (la situación normal), el camino de largo 1 tendrá diferentes intensidades, puesto que dependerá del nodo utilizado como referencia. Para obtener los valores del sistema en su estado de equilibrio final, se usa el límite de A^k para k grande ya que, para una matriz inconsistente, la suma de todas las dominancias a lo largo de los caminos de largo 1, 2, 3,…,n, tiene como límite el determinado por la suma de Cesaro, y éste límite es precisamente el vector propio principal de la matriz de juicios [A].

La dominancia total $w(A_i)$, de la alternativa i sobre todas las otras alternativas a lo largo de todos los caminos de los distintos largos posibles está dada por la serie infinita:

$$w(A_i) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(k)}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(k)}}$$

Cuya suma, es la suma de Cesaro:

Luis Thayer Ojeda 0180 | Of.1004
Providencia,Santiago, Chile
Teléfono: +56.2.234.1778
Fax: +56.2.231.9731
www.fulcrum.cl

$$\lim_{M \to \infty} \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(k)}}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(k)}}$$

Esto es así, porque los resultados de las sumas de cada uno de los diferentes conjuntos de k números quedan determinados por sus valores totales. Así, el promedio de cada suma se obtiene dividiendo por k (k=*M* en este caso). Estos promedios entregan el mismo resultado porque sólo difieren en la misma constante que la sumas originales. A menudo, la suma de una serie infinita de números es infinito, pero al formar el promedio de los k primeros números se tiene que, en la medida que k crece, ese promedio puede converger, (esto es así ya que si bien el numerador tiende a infinito, también tiende a infinito el denominador (*M*)). Además, en el caso de este límite, la convergencia se produce al valor del k-ésimo término de la serie. Por lo tanto, tomar el límite de los promedios entrega un valor significativo para el resultado del valor de las dominancias existentes entre las alternativas a ser medidas. Esta fue una observación muy profunda y demostrada por el matemático italiano Ernesto Cesaro. Este notable resultado es la base de la métrica de dominancias (el camino para construir la topología ordinal con un resultado de significado cardinal).

En resumen, de acuerdo con la suma de Cesaro para los caminos de dominancia, la última iteración puede remplazar todas las anteriores, donde cada iteración k representa todos los caminos de largo k que conectan el nodo *X* con el nodo *Y*. Por lo tanto, en la medida que k tiende a infinito, A^k contiene todos los posibles caminos que conectan el nodo *X* con el nodo *Y*, considerando todos los eventuales nodos intermedios. De esta forma, se demuestra que el vector propio es la forma correcta de medir la dominancia límite, situación que representa el estado de equilibrio final del sistema, puesto que: Lím $[A]^n$ cuando $n \rightarrow \infty$, corresponde al principal vector propio de la matriz [A] que, en su estado de equilibrio final, es igual a cualquier columna de la matriz A normalizada.

Este principio, que está en la base del AHP a través del operador vector propio, se halla presente de forma aún mas profunda en el ANP (la generalización matemática del AHP), al manejar múltiples puntos de equilibrio simultáneos. Al aplicar Cesaro en la supermatriz del ANP con más de un punto de equilibrio (mas de un atractor), el equilibrio final, se produce precisamente en el promedio aritmético de estos puntos.

Consistencias

En los teoremas enunciados anteriormente, aparece repetidamente el término "consistente". Como ya fue enunciado, una matriz $[A]$ es consistente si $a_{ik} = a_{ij}a_{jk}$ $\forall i, j, k = 1,...,n$ A continuación se ejemplifica este concepto para matrices de comparaciones, que son además: positivas y recíprocas.

Para el ejemplo anterior de las impresoras, se puede ver que la condición de consistencias se cumple, esto es, $a_{12} x a_{23} = a_{13}$ (1x6=6).

Sin embargo, como resultado de la integración de las visiones de los distintos participantes en la votación, se podrían haber obtenido los valores siguientes:

Luis Thayer Ojeda 0180 | Of.1004
Providencia,Santiago, Chile
Teléfono: +56.2.234.1778
Fax: +56.2.231.9731
www.fulcrum.cl

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 7 \\ 1/6 & 1/7 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Claramente, hay una pequeña inconsistencia, ya que ahora $a_{12}xa_{23} = a_{13}$ ($1x7 \neq 6$). Sin embargo el resultado podría haber sido:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1/9 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{ó peor aún} \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1/4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Aquí se observan dos formas diferentes de inconsistencia:

- en la primera matriz, se dice que A es levemente preferible a B y luego que B es también levemente preferible a C, por lo tanto A debe ser preferible "entre moderadamente y fuertemente" a C (lo que podría corresponder a valores entre 3 y 5 de la Escala de Saaty"). Pero el valor 9 ingresado dice que A es "extremadamente" preferible a C. Este tipo de inconsistencia, refleja un problema en la "Proporción" de las intensidades de preferencia.
- En el segundo caso, se indica que A es levemente preferible a B, que B es moderadamente preferible a C, y cuando se compara A con C, resulta que ahora es C la que es "más que moderadamente preferible a A". Aquí no sólo hay un problema con la proporción de las intensidades asociadas a las comparaciones, sino que además hay un problema con la transitividad de las preferencias, pues el orden entre A y C se ha invertido.

En cualquiera de los casos, convendría revisar las votaciones para descartar eventuales errores básicos, y detectar cuál de las tres comparaciones es la que debe corregirse. A priori no se sabe a ciencia cierta si el error ocurrió al comparar *A* con *B*, al comparar *B* con *C,* o al comparar *A* con *C*, pero hay al menos una comparación que debe corregirse.

Con matrices pequeñas como ésta, no suele ser difícil detectar el error y corregirlo. Pero en matrices grandes, de 5x5 o superiores, no es tan sencillo encontrar el origen de las inconsistencias grandes, pues son muchos los factores que pueden estar incidiendo sobre ello. Las razones de la existencia de inconsistencias son múltiples y al detectarlas conviene siempre detenerse y aclarar qué pasó. Entre las probables fuentes están: errores en la interpretación de la comparación que se estaba llevando a cabo, incorporación inconsciente de criterios adicionales al valorar la comparación, votación emitida por personas que no son muy entendidas en el tema, errores en la digitalización o trascripción de valor, inversión de la importancia de los criterios comparados, deseos de imponer un cierto resultado, deseos de "sabotear" una cierta valoración, agenda oculta, etc.

2.6 Composición Jerárquica y Síntesis Multilineal

Luis Thayer Ojeda 0180 | Of.1004
Providencia,Santiago, Chile
Teléfono: +56.2.234.1778
Fax: +56.2.231.9731
www.fulcrum.cl

El proceso de cálculo del vector prioridades (vector propio), se realiza para cada nivel de criterios de la jerarquía, y su resultado se obtiene a partir del álgebra de matrices. Luego, se sintetiza todo el modelo aplicando el principio de composición jerárquica, el que permite acercar el modelo a la realidad tanto como se quiera, independiente de su grado de complejidad. Por otro lado, asegura la relación de transitividad proporcional de cumplimiento o aporte de objetivos entre los diferentes niveles. De esa forma, si un programa o proyecto aporta a un criterio terminal en un valor o grado local dado, este aporte se transferirá a las capas superiores en función de la importancia de los criterios padres, nivel por nivel, hasta llegar al objetivo global. Esta transición de cumplimiento o aporte se realizará en la proporción (peso) que presente al criterio terminal y su línea jerárquica. [4.5],

La ecuación de transferencia de aporte o principio de composición multilineal (y por ende de tipo no lineal), que permite determinar el valor de cada alternativa esta dado por:

$$\mathbf{w_{11} * w_{12} * \ldots * w_p * X_1 + w_{21} * w_{22} * \ldots * w_{2p} * X_2 + w_{i1} \ldots * w_{ip} * x_n} = AP_i$$

Que se puede expresar en forma sintética como:

$$\boxed{\Sigma_i \left(\Pi_p\, w_{ij}\right) x_i = AP_j \quad \text{con: } i = 1,\ldots, CT\ ;\ j = 1,\ldots, L\text{-}1 \qquad [4.5],}$$

Con:
CT= Número de criterios terminales de la jerarquía
L = Número de niveles de la jerarquía
$\mathbf{X_i}$ = Evaluación de la alternativa en el criterio i
$\mathbf{w_{ij}}$ = Peso local del criterio i en el nivel j-1
$\Pi_p \mathbf{w_{ij}}$ = Pitatoria (operador multiplicativo), de los w_{ij}
AP_j = Aporte de la Alternativa j al logro del objetivo final

Como se puede observar, esta fórmula de cálculo para L>3, (más de 3 niveles jerárquicos), es claramente no lineal y sirve para determinar de forma precisa la contribución o aporte de cada alternativa al objetivo.

2.7 Axiomas del AHP

Un axioma, es una condición que debe aceptarse como válida o necesariamente cierta para poder construir una estructura lógica sobre el. Por esto, es bueno que las estructuras en general sean ligeras en sus requerimientos axiomáticos, es decir, que requieran de pocos axiomas y estos sean de un carácter lógico y fácil de aceptar. El AHP, tiene cuatro axiomas como base de su construcción teórica, y estos, son de un carácter lógico simple dado que no solicitan comportamientos singulares o difíciles de ser aceptados en términos racionales. Sin embargo, sus implicancias son importantes.

Por último, es importante recordar que el usuario del sistema deberá siempre estar revisando que los modelos creados obedezcan estos 4 axiomas, pues en caso contrario,

Luis Thayer Ojeda 0180 | Of.1004
Providencia,Santiago, Chile
Teléfono: +56.2.234.1778
Fax: +56.2.231.9731
www.fulcrum.cl

la validez de los resultados puede verse comprometida por una mala implementación del método.

Cabe hacer notar que todas la metodologías de solución de problemas, optimización, programación lineal, etc, tienen también axiomas básicos para su utilización y que es imprescindible conocer para aplicar estos métodos en forma correcta.

A continuación se desarrollan en detalle estos 4 axiomas:

Axioma 1 : Condición de reciprocidad

La condición de reciprocidad indica que la intensidad de preferencia de Ai sobre Aj debe ser inversa a la preferencia de Aj sobre Ai.

$$Ai = n^* Aj \rightarrow Aj = 1/n^* Ai$$

Esto, en palabras simples significa que si una alternativa A es el doble de preferible que otra B, entonces es condición necesaria que la alternativa B sea la mitad de preferible que A.

Las implicancias de este axioma son varias, por ejemplo, esto hace que la matriz de comparaciones a pares así construida, sea recíproca, positiva y con solamente unos en su diagonal y diagonal dominante (mayor valor propio positivo), lo que asegura la convergencia de la matriz. Además, permite reducir el número total de comparaciones a pares a: n(n-1)/2 comparaciones, siendo “n” el tamaño o dimensión de la matriz de comparaciones a pares.

Algunas personas consideran que esta condición es una restricción demasiado fuerte, pues según dicen, no siempre la preferencia de A sobre B, es reciproca a la preferencia de B sobre A. Este fenómeno, en la visión de los autores, se produce cuando la persona mezcla espacios o universos que no deben ser combinados (por ejemplo beneficios y costos), y que piensa que las escalas de medida van de menos a mas infinito de manera continua. En la mayoría de las ocasiones, este continuo no se cumple. Por ejemplo, la infelicidad no es el recíproco de la felicidad en términos de una escala de medida única y continua *(Teoría de la Motivación de Herzberg).*

El siguiente ejemplo didáctico puede ilustrar este concepto:

El equipo chileno de fútbol es bastante inferior al brasileño.

Ergo, el nivel de felicidad en el raro caso que Chile ganara a Brasil es extremo → (8 ó 9, en la escala fundamental de Saaty).

Por otro lado, en caso que Chile pierda frente a Brasil, el nivel de pena o angustia es sólo medio → (1/3 o 1/4), valores muy diferentes a los recíprocos de los valores iniciales1/8 o 1/9.

Esto muestra la importancia de construir modelos que sean capaces de reconocer estas diferencias de medida y manejarlas de forma separada, (por ejemplo modelos de beneficios y modelos de costos).

El concepto de reciprocidad juega un rol muy importante en los procesos evolutivos de las especies, en la medida que su complejidad social aumenta, este principio se va haciendo cada vez más necesario y profundo. Como el mismo Charles Darwin notara, la división y clasificación del trabajo es un resultado directo del principio de reciprocidad: cada miembro entrega en la medida que recibe, y confía que así se comportará el sistema, pues en caso contrario todo la estructura social se vendría abajo.

Luis Thayer Ojeda 0180 | Of.1004
Providencia,Santiago, Chile
Teléfono: +56.2.234.1778
Fax: +56.2.231.9731
www.fulcrum.cl

Axioma 2 : Condición de homogeneidad

La condición de homogeneidad indica que los elementos a comparar deben ser de un mismo orden de magnitud, es decir:

$Ai < 10 \times Aj$ Para todo i, j de cada nivel de la jerarquía

Este axioma implica que el mecanismo de comparación entre los diferentes criterios o alternativas tiene ciertos requerimientos y no puede ser realizado de cualquier forma. Este requerimiento, está relacionado con la capacidad de los seres humanos de comparar elementos dentro de un mismo orden de magnitud, si se busca tener una precisión y nivel de consistencia aceptable en los resultados. Por ejemplo, tratar de comparar por tamaño a la Tierra con el Sol, o en caso extremo a la Tierra con un átomo, de forma precisa es imposible. Esto, porque los ordenes de magnitud son demasiado diferentes (10 elevado a 20 ó 10 elevado a 30 para un ser humano, en términos de tamaño es el mismo número). Sin embargo, al hacer esto mismo con Marte o eventualmente con la Luna, la comparación es posible. La homogeneidad debe ser siempre cuidada y revisada en todo el modelo.

Notar que en el caso que los criterios o alternativas a ser comparadas sean muy diferentes (no homogéneos), es siempre posible construir una comparación entre ellos mediante el método del pivote, el que consiste en crear nuevos niveles ficticios dentro de la jerarquía, y utilizar alguno de estos criterios como pivote repitiendo su presencia en dos niveles consecutivos, generando una relación continua entre ellos. Repitiendo este esquema, es posible (en teoría, pues el número de niveles ficticios requeridos sería igualmente excesivo), comparar un átomo con la Tierra en saltos discretos de no mas de una magnitud.

Axioma 3 : Condición de dependencia y retroalimentación (Feed-back)

La condición de dependencia se expresa en identificar y controlar el nivel de interrelación entre los elementos de la estructura. Existen dos tipos de dependencia:

Dependencia externa; es la que se define entre criterios y/o alternativas ubicados en distintos niveles de la estructura.

Dependencia interna: es la que se define entre criterios y/o alternativas ubicados en el mismo nivel de la estructura.

Conceptualmente, si un problema tiene interdependencias entre los criterios y/o los criterios y las alternativas entonces, la plataforma AHP debe ser reemplazada por la plataforma ANP.

En los sistemas en general, las dependencias (externas o internas), generan cambios en los flujos dentro del sistema, pudiéndo perder las características jerárquicas del mismo. En la jerarquía, la importancia del hijo viene controlada por el padre (dependencia vertical) no pudiendo existir otro origen de contribuciones. Sin embargo, en la realidad existen otras condiciones de relación y dependencia, por lo que es importante que durante el proceso de modelación, así como, en el de comparaciones a pares, el facilitador analice esta situación y la sopese. Si bien las jerarquías son relativamente simples de construir, modelar, presentar y entender, y sus resultados son simples de analizar y entender, es cierto también que un problema con dependencias modelado como si no las tuviera conducirá a errores en los resultados, el grado de este error, dependerá del grado o intensidad de la o las dependencias no consideradas. Notar también que existen formas de modelar dependencias “suaves”, en un modelo jerárquico también, en caso de ser necesario mantener este tipo de modelación.

Axioma 4 : Condición de cumplimiento de expectativas

Este axioma dice que todas las expectativas deben ser representadas en el modelo (sistema), en términos de criterios y alternativas. Las prioridades así obtenidas, se espera sean compatibles con estas expectativas. En términos simples, esto significa que si uno elimina o agrega criterios y/o alternativas a un problema, este debe ser revisado en su conjunto nuevamente, puesto que nuevos criterios y/o alternativas definen un nuevo sistema. El efecto de no respetar este axioma son las inversiones inesperadas del ranking, lo que se aprecia en el siguiente ejemplo:

Estado de equilibrio 1: A domina B
Estado de equilibrio 2: Agrego C tal que; A domina C
Estado de equilibrio 3: B domina A **¿?** ⇒⇐

¿Cómo es posible que al agregar alternativas dominadas por A (en principio, irrelevantes desde la perspectiva de A), en algún punto A pierda su categoría dominante?. Se espera, que al introducir una alternativa irrelevante (dominada por las demás) no se afecte el orden del ranking, mientras que una alternativa dominante, si pudiera hacerlo. Sin embargo, es un hecho que en problemas reales se pueden producir inversiones en el ordenamiento de un conjunto de alternativas al agregar o eliminar alternativas irrelevantes.

Esta es una característica de algunos problemas y ha sido estudiada y aplicada especialmente como una herramienta de marketing. Pocas metodologías de toma de decisión permiten la inversión de ranking o "*rank reversal*" en inglés.... y esto, suele presentarse como un problema del AHP, sin serlo[5].

Se entrega el siguiente ejemplo didáctico (utilizado comúnmente en marketing) con el objeto de fijar ideas:

Una cierta marca tiene los productos A y B que se venden en todos los supermercados. El producto B es mejor que el producto A. El producto B es más caro que el producto A. En general, la gente elige el producto A por el precio (A domina B).

El productor (que desea vender más del producto B), anuncia el lanzamiento de un nuevo producto C. El producto C, es ligeramente mejor que B, pero mucho más caro. La gente tiende a desplazarse del producto A al B. (B domina A).

La estrategia del lanzamiento de un producto más caro, es muy utilizada en marketing para producir intencionalmente la inversión del ranking de preferencias de los consumidores. Es importante que la metodología de toma de decisiones represente fielmente el pensamiento de las personas en el momento de tomar sus decisiones.

Cabe hacer notar, que de requerirse, es posible evitar las inversiones en el ranking como una condición de borde del sistema. Para esto, se debe utilizar el AHP en su opción de medida absoluta (AM), ya descrito en el punto 2.3.

[5] *En realidad, el verdadero problema es no permitirlo (o no aceptarlo).*